

ŘEŠENÍ

Cvičení 1. Výsledek je $\frac{\binom{n}{k}5^{n-k}}{6^n}$, předpokládáme-li, že je na cvičení n studentů.

Cvičení 2. (a) $\frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98}$, (b) $\frac{\binom{5}{2}\binom{95}{1} + \binom{5}{3}}{\binom{100}{3}}$, (c) $\left(\frac{95}{100}\right)^3$, $\frac{95 \cdot 5^2 + 5^3}{100^3}$

Cvičení 3. Využili jsme princip inkluze a exkluze a dostali jsme $1 - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (1 - i/n)^r$

Cvičení 4. (a) $\frac{2}{5}$, (b) $\frac{6}{11}$

Cvičení 5. pokus: nejprve náhodně vybereme truhlu a z ní potom náhodně minci

$\Omega = \{(\text{truhla}, \text{mince}); \text{truhla} \in \{A, B, C\}, \text{mince} \in \{\text{zlatná}, \text{stříbrná}\}\}$.

Interpretace zadání: Ptáme se na $\mathbb{P}(\text{truhla} = A | \text{mince} = \text{zlatá})$. Ze zadání víme:

$$\mathbb{P}(\text{truhla} = A) = \mathbb{P}(\text{truhla} = B) = \mathbb{P}(\text{truhla} = C) = 1/3$$

$$\mathbb{P}(\text{mince} = \text{zlatá} | \text{truhla} = A) = 1$$

$$\mathbb{P}(\text{mince} = \text{zlatá} | \text{truhla} = B) = 0$$

$$\mathbb{P}(\text{mince} = \text{zlatá} | \text{truhla} = C) = 1/2$$

Použitím Bayesovy věty dostaneme výsledek $2/3$.

Cvičení 6. pokus: nejprve náhodně vybereme e-mail a potom ho náhodně označíme jako spam a nebo jako korektní poštu (OK)

$\Omega = \{(\text{e-mail}, \text{označení}); \text{e-mail}, \text{označení} \in \{\text{spam}, \text{OK}\}\}$.

Interpretace zadání: Ptáme se na (a) $\mathbb{P}(\text{označení} = \text{spam})$, (b) $\mathbb{P}(\text{e-mail} = \text{OK} | \text{označení} = \text{spam})$,

(c) $\mathbb{P}(\text{e-mail} = \text{spam} | \text{označení} = \text{OK})$. Ze zadání víme:

$$\mathbb{P}(\text{e-mail} = \text{spam}) = 4/5$$

$$\mathbb{P}(\text{e-mail} = \text{OK}) = 1/5$$

$$\mathbb{P}(\text{označení} = \text{spam} | \text{e-mail} = \text{spam}) = 9/10$$

$$\mathbb{P}(\text{označení} = \text{spam} | \text{e-mail} = \text{OK}) = 3/20$$

Použitím Bayesovy věty a věty o úplné pravděpodobnosti dostaneme výsledky (a) $3/4$, (b) $1/25$, (c) $8/25$.

Cvičení 7. (a) Vyhrajeme s pravděpodobností $2/5$, prohrajeme s pravděpodobností $3/5$, (b) použitím Bayesovy věty dostaneme $\frac{10}{3} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{6^k}\right)$

Cvičení 8. Použitím věty o úplné pravděpodobnosti a věty o násobení pravděpodobností dostaneme $2/5$.